Neuronale Netze
Schwellenwertelemente

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Stober

Artificial Intelligence Lab
Institut für Intelligente Kooperierende Systeme
Fakultät für Informatik
stober@ovgu.de

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

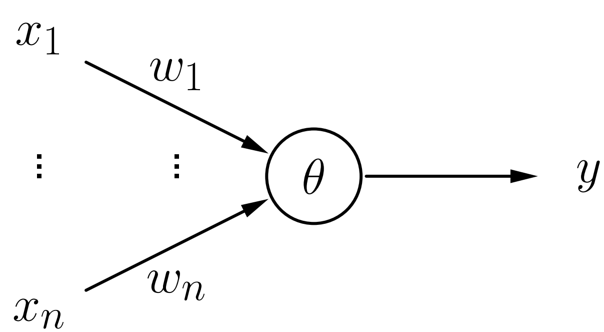
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

AILAB

Definition

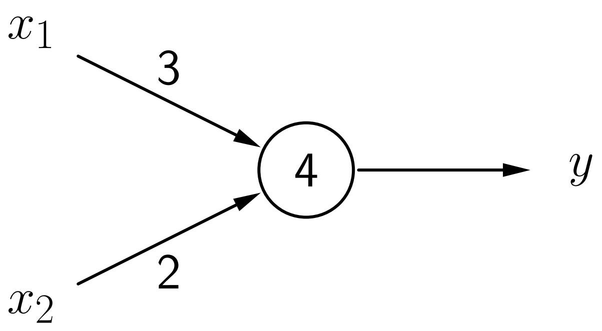
Ein **Schwellenwertelement** (Threshold Logic Unit, TLU) ist eine Verarbeitungseinheit für Zahlen mit n Eingängen $x_1, \ldots, x_n$ und einem Ausgang y. Das Element hat einen **Schwellenwert** θ und jeder Eingang x_i ist mit einem **Gewicht** w_i versehen. Ein Schwellenwertelement berechnet die Funktion

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \vec{x}\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



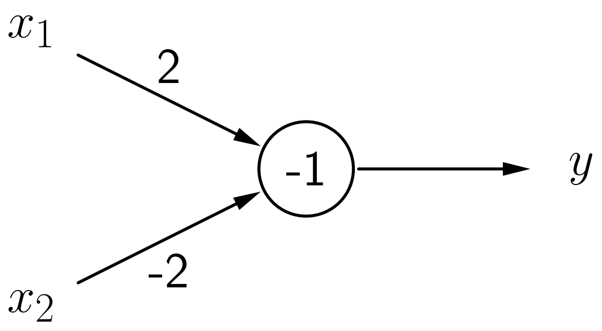
Beispiele

Schwellenwertelement für die Konjunktion $x_1 \wedge x_2$.



x_1	x_2	$3x_1 + 2x_2$	y
0	0	0	0
1	0	3	0
0	1	2	0
1	1	5	1

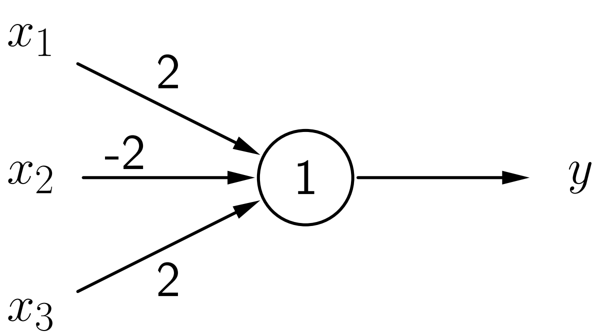
Schwellenwertelement für die Implikation $x_2 \rightarrow x_1$.



x_1	x_2	$2x_1 - 2x_2$	y
0	0	0	1
1	0	2	1
0	1	-2	0
1	1	0	1

Beispiele

Schwellenwertelement für $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$**.**



x_1	x_2	x_3	$\sum_i w_i x_i$	y
0	0	0	0	0
1	0	0	2	1
0	1	0	-2	0
1	1	0	0	0
0	0	1	2	1
1	0	1	4	1
0	1	1	0	0
1	1	1	2	1

Geometrische Interpretation

Rückblick: Geradendarstellungen

Geraden werden typischerweise in einer der folgenden Formen dargestellt:

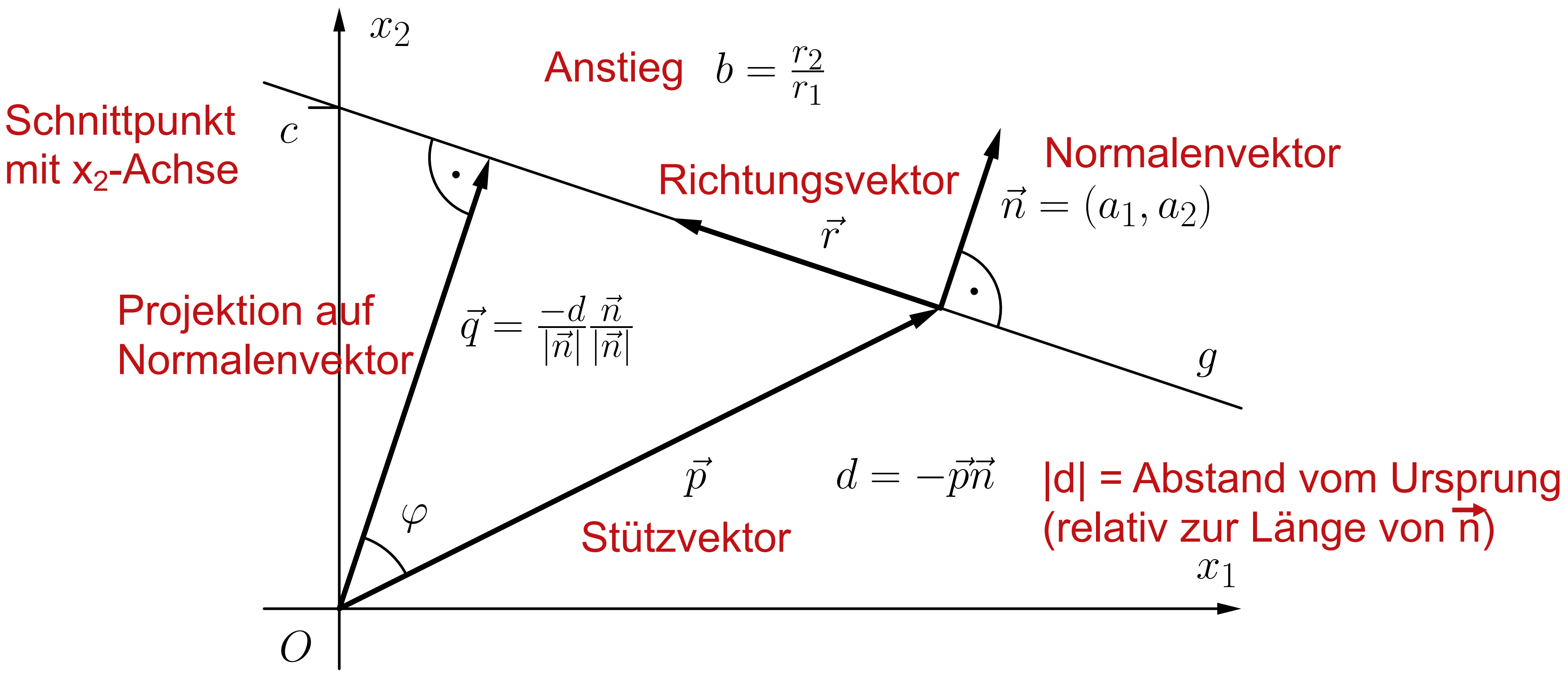
Explizite Form:	g	$\equiv$	$x_2 = bx_1 + c$
Implizite Form:	g	$\equiv$	$a_1x_1 + a_2x_2 + d = 0$
Punkt-Richtungs-Form:	g	$\equiv$	$\vec{x} = \vec{p} + k\vec{r}$
Normalform	g	$\equiv$	$(\vec{x} - \vec{p})\vec{n} = 0$

mit den Parametern

b :	Anstieg der Geraden
c :	Abschnitt der x_2-Achse
$\vec{p}$:	Ortsvektor eines Punktes der Gerade (Stützvektor)
$\vec{r}$:	Richtungsvektor der Gerade
$\vec{n}$:	Normalenvektor der Gerade

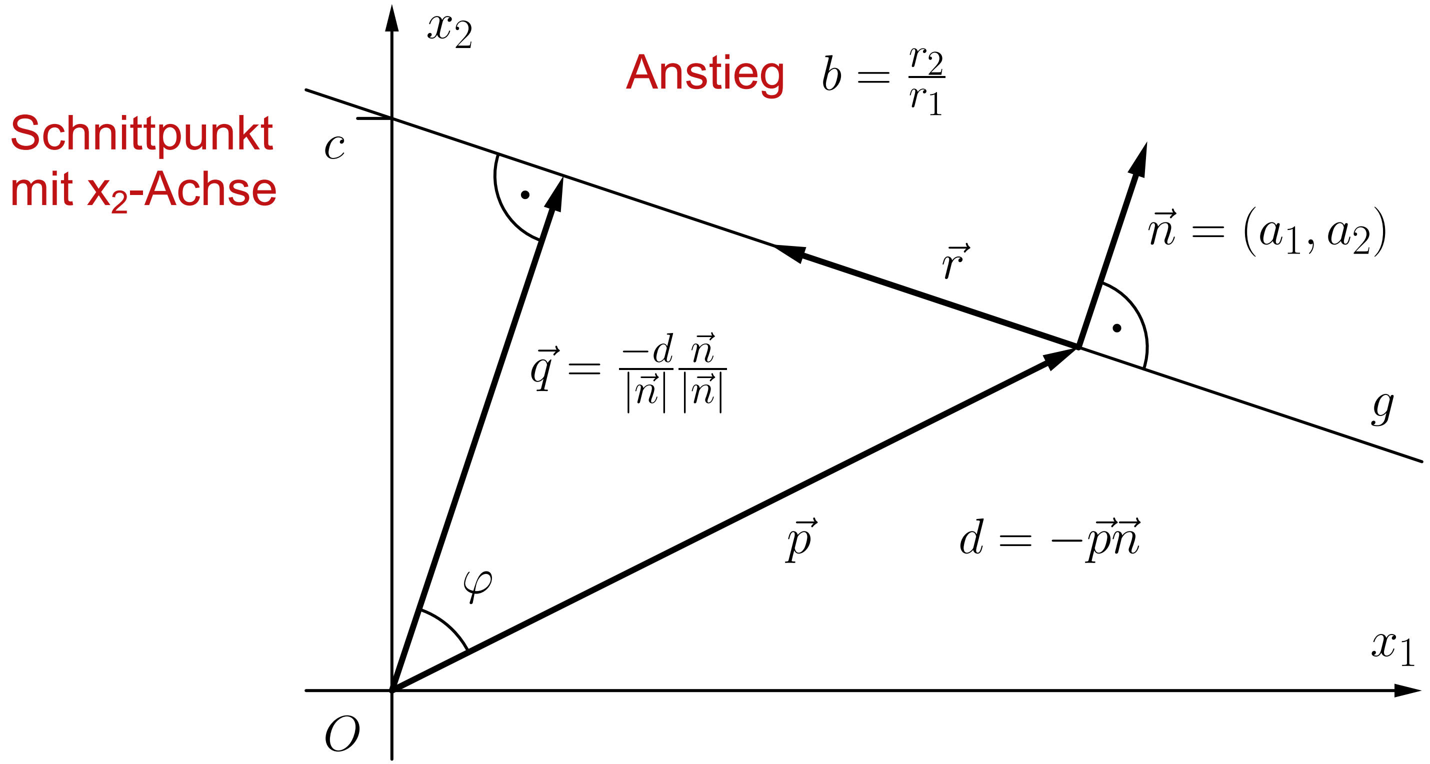
Geometrische Interpretation

Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



Geometrische Interpretation

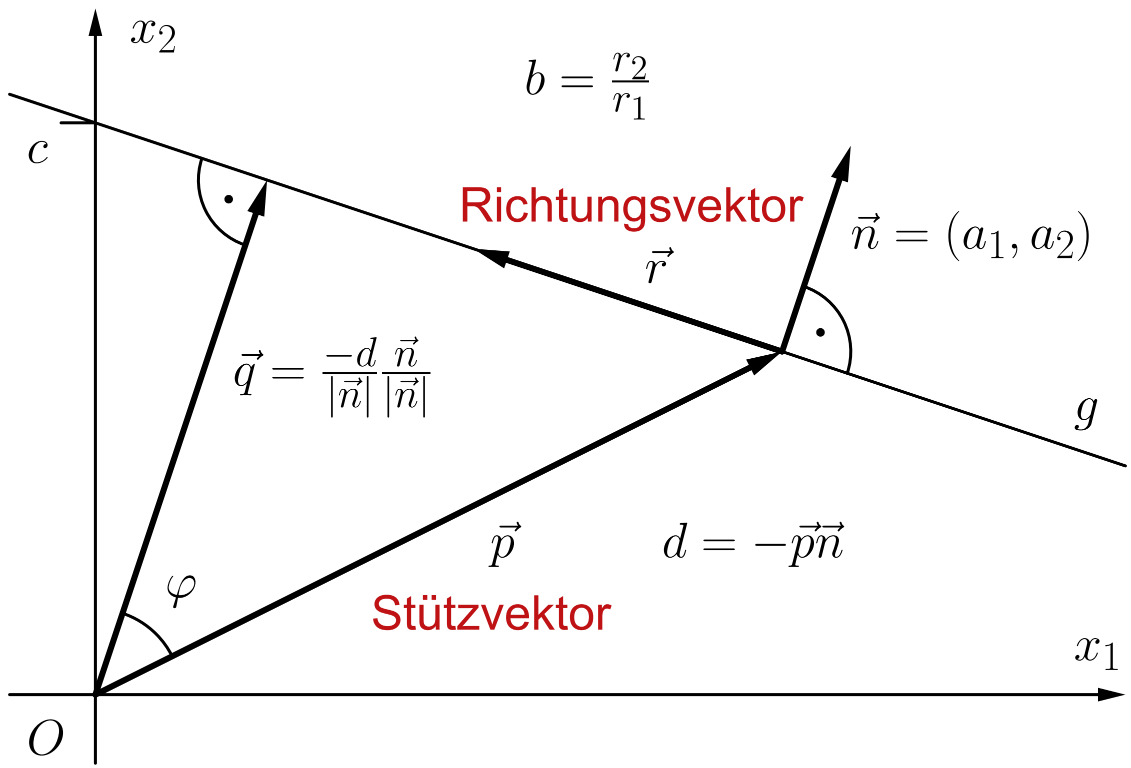
Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



$x_2 = bx_1 + c$

Geometrische Interpretation

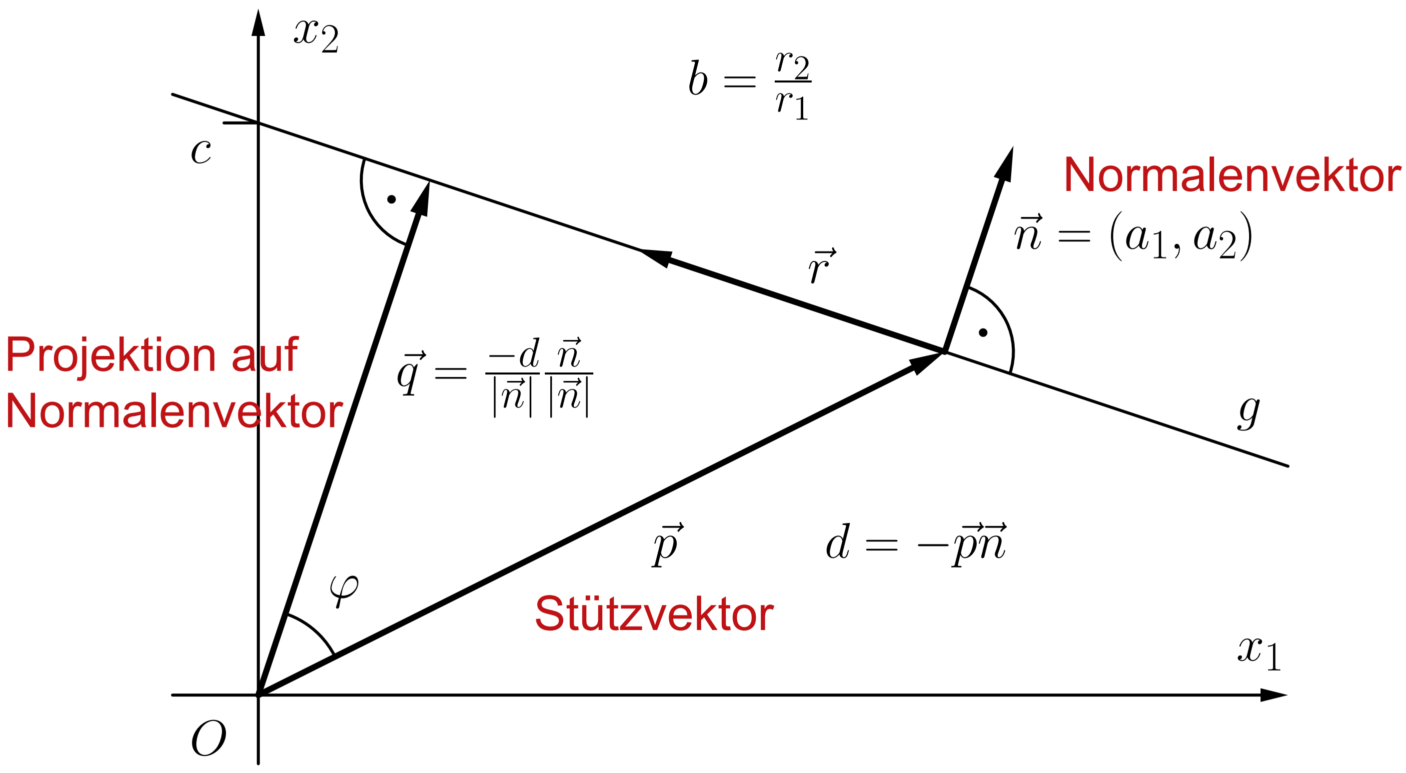
Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



$$\vec{x} = \vec{p} + k\vec{r}$$

Geometrische Interpretation

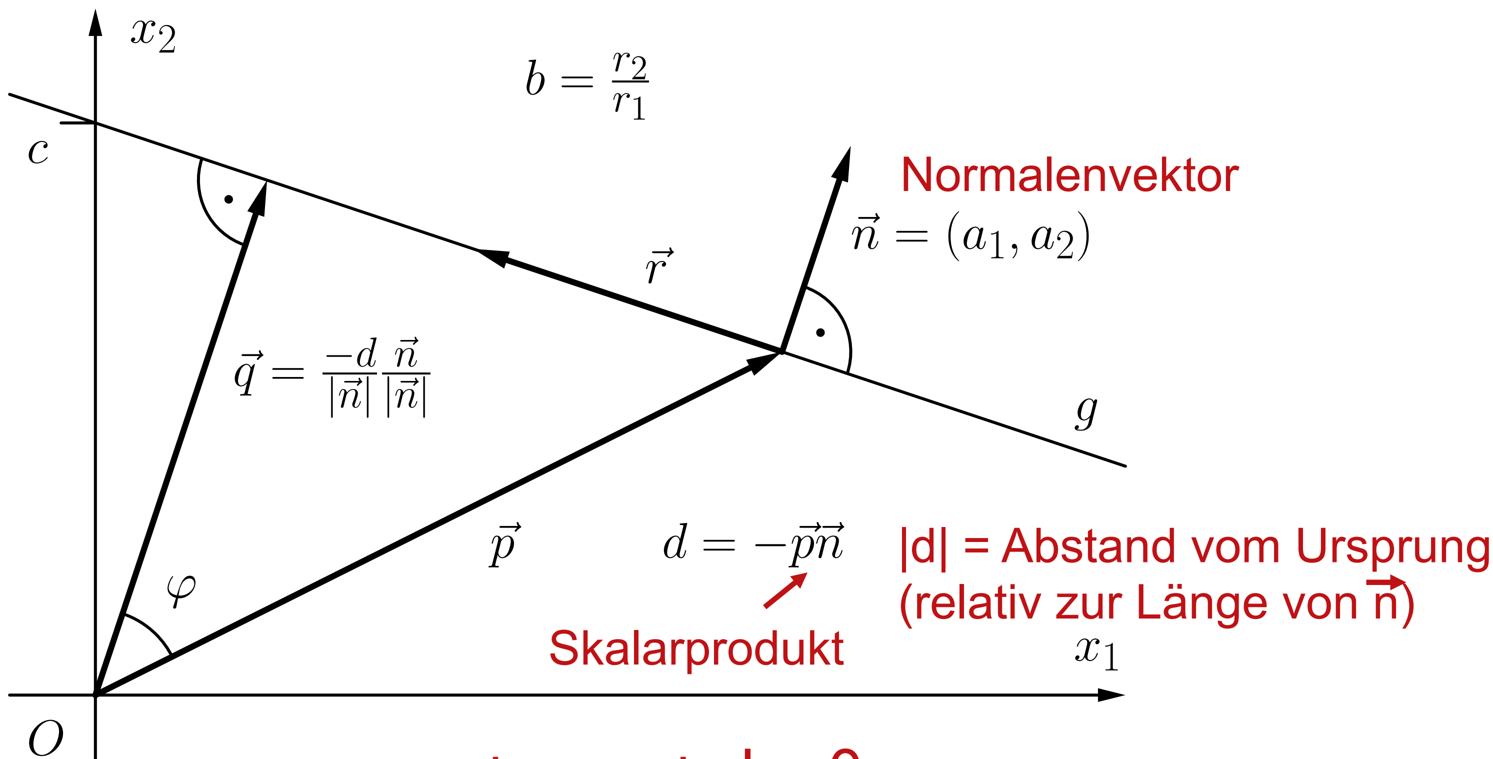
Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



$(\vec{x} - \vec{p})\vec{n} = 0$

Geometrische Interpretation

Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



$$a_1x_1 + a_2x_2 + d = 0$$

aus Vorzeichen von d Lage des Ursprungs ablesen:

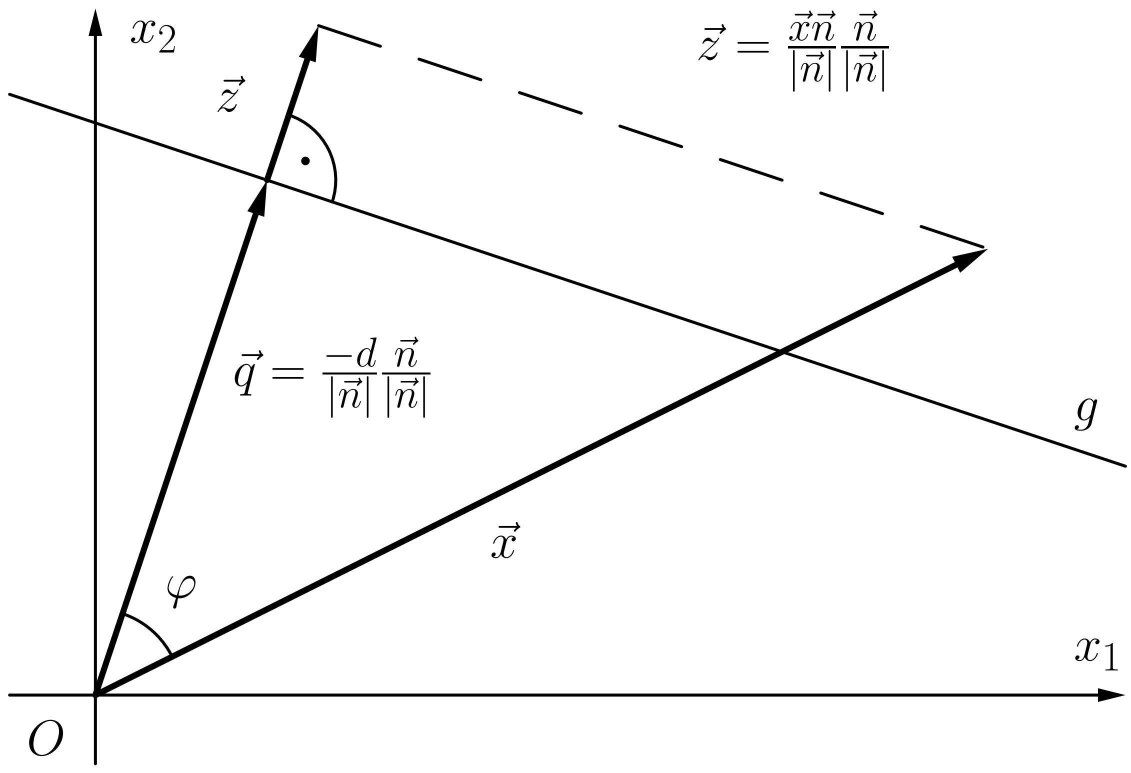
d = 0 : geht durch den Ursprung

d < 0 : $\vec{n}$ zeigt vom Ursprung weg

d > 0 : $\vec{n}$ zeigt zum Ursprung hin

Geometrische Interpretation

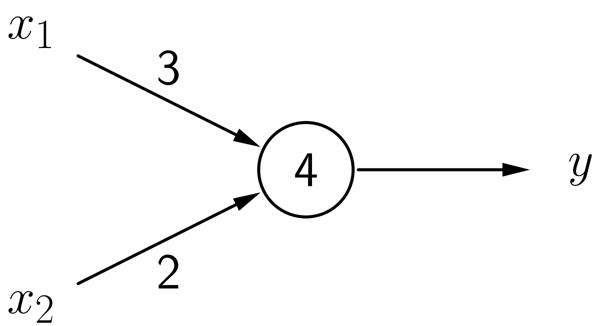
Bestimmung, auf welcher Seite ein Punkt $\vec{x}$ liegt.

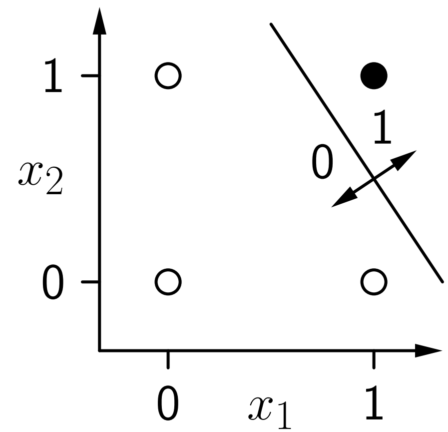


$\vec{x}\vec{n} > -d$: auf Seite von g, zu der der Normalenvektor zeigt
$\vec{x}\vec{n} < -d$: auf der gegenüberliegenden Seite
$\vec{x}\vec{n} = 0$: auf g

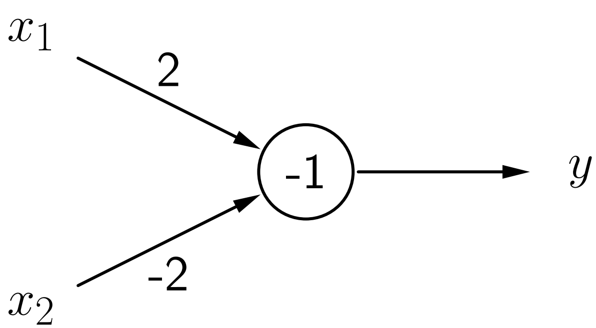
Geometrische Interpretation

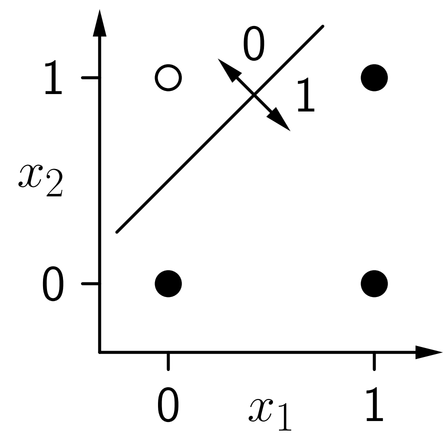
Schwellenwertelement für $x_1 \wedge x_2$.





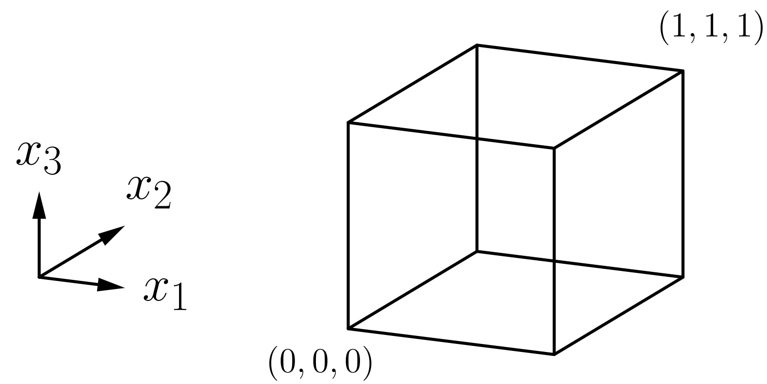
Ein Schwellenwertelement für $x_2 \rightarrow x_1$.



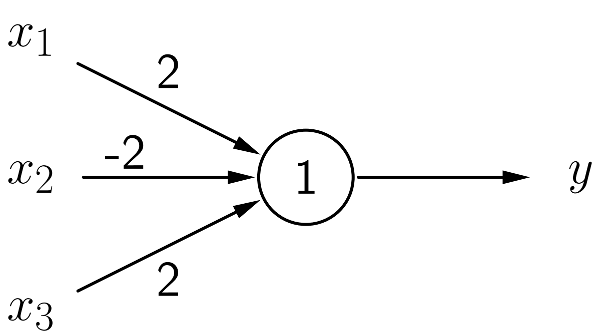


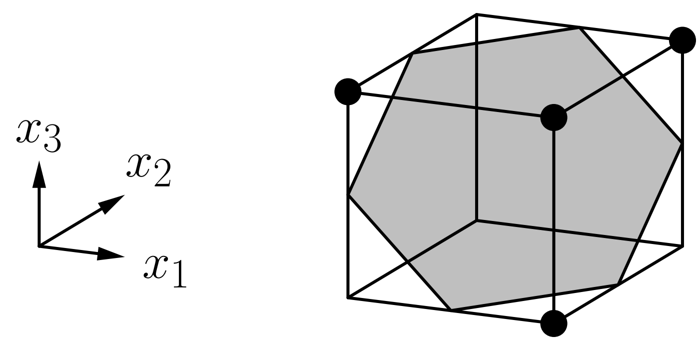
Geometrische Interpretation

Darstellung 3-dimensionaler Boolescher Funktionen:



Schwellenwertelement für $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$**.**





Lineare Separabilität

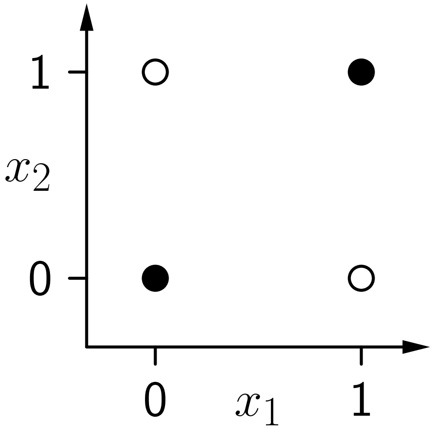
Zwei Punktmengen in einem n-dimensionalen Raum heißen linear separabel, wenn sie durch eine (n-1)-dimensionale Hyperebene getrennt werden können. Die Punkte der einen Menge dürfen dabei auch auf der Hyperebene liegen.

Eine Boolesche Funktion heißt linear separabel, falls die Menge der Urbilder von 0 und die Menge der Urbilder von 1 linear separabel sind.

Grenzen

Das Biimplikationsproblem $x_1 \leftrightarrow x_2$: Es gibt keine Trenngerade.

x_1	x_2	y
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1



Formaler Beweis durch reductio ad absurdum:

$$\begin{array}{llll}
\text{da } (0,0) \mapsto 1: & 0 & \geq \theta, & (1) \\
\text{da } (1,0) \mapsto 0: & w_1 & < \theta, & (2) \\
\text{da } (0,1) \mapsto 0: & w_2 & < \theta, & (3) \\
\text{da } (1,1) \mapsto 1: & w_1 + w_2 & \geq \theta. & (4)
\end{array}$$

(2) und (3): $w_1 + w_2 < 2\theta$. Mit (4): $2\theta > \theta$, oder $\theta > 0$. Widerspruch zu (1).

Grenzen

Vergleich zwischen absoluter Anzahl und der Anzahl linear separabler Boolescher Funktionen.
([Widner 1960] zitiert in [Zell 1994])

Eingaben	Boolesche Funktionen	linear separable Funktionen
1	4	4
2	16	14
3	256	104
4	65536	1774
5	$4.3 \cdot 10^9$	94572
6	$1.8 \cdot 10^{19}$	$5.0 \cdot 10^6$

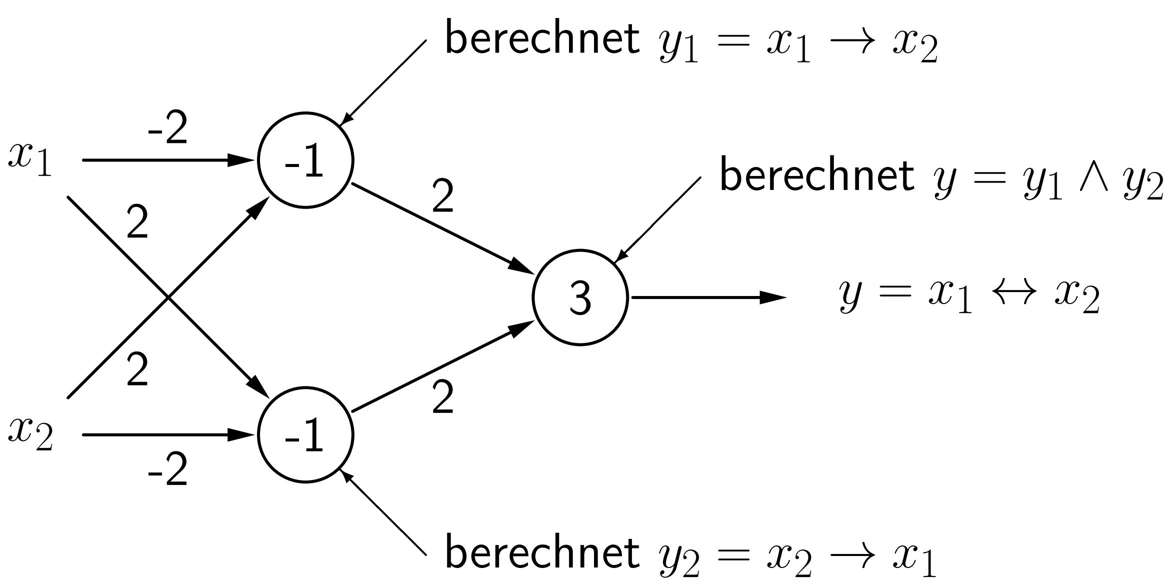
Für viele Eingaben kann ein SWE fast keine Funktion berechnen.

Netze aus Schwellenwertelementen sind notwendig, um die Berechnungsfähigkeiten zu erweitern.

Netze aus Schwellenwertelementen

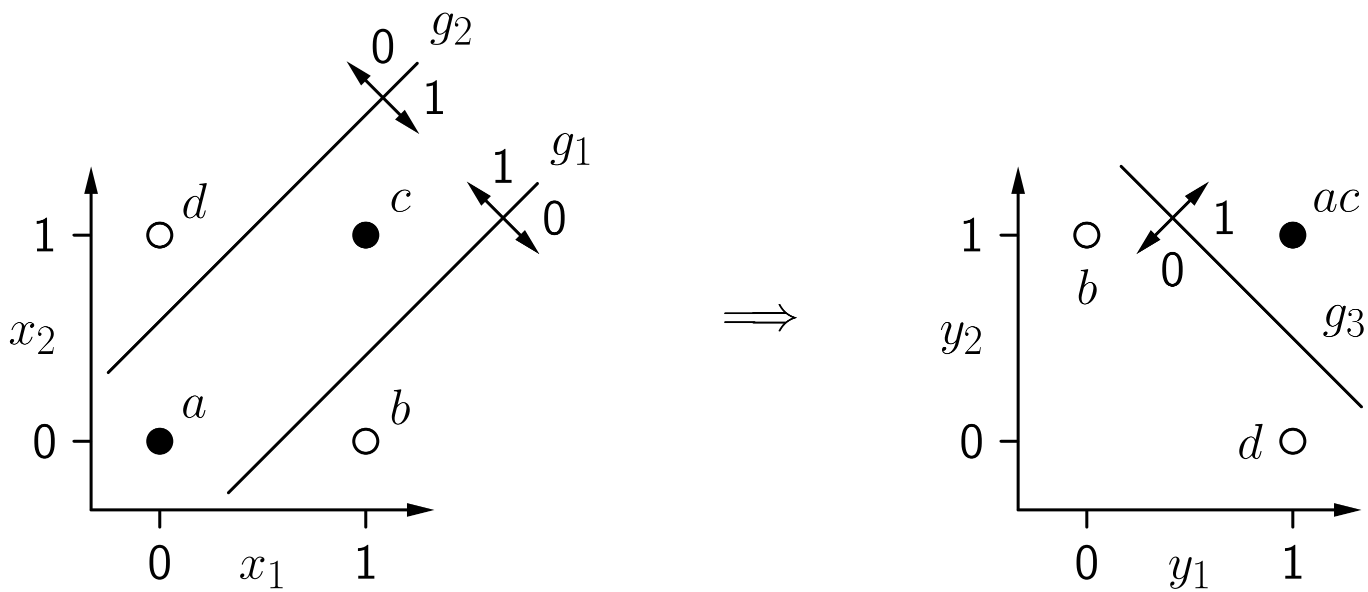
Biimplikationsproblem, Lösung durch ein Netzwerk.

Idee: logische Zerlegung $\quad x_1 \leftrightarrow x_2 \quad \equiv \quad (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$



Netze aus Schwellenwertelementen

Lösung des Biimplikationsproblems: Geometrische Interpretation



Die erste Schicht berechnet neue Boolesche Koordinaten für die Punkte.

Nach der Koordinatentransformation ist das Problem linear separabel.

Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen

Sei $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Boolesche Funktion mit n Variablen.

(i) Stelle $f(x_1, \ldots, x_n)$ in disjunktiver Normalform dar. D.h. bestimme $D_f = K_1 \vee \ldots \vee K_m$, wobei alle K_j Konjunktionen von n Literalen sind, d.h., $K_j = l_{j1} \wedge \ldots \wedge l_{jn}$ mit $l_{ji} = x_i$ (positives Literal) oder $l_{ji} = \neg x_i$ (negatives Literal).

(ii) Lege ein Neuron für jede Konjunktion K_j der disjunktiven Normalform an (mit n Eingängen — ein Eingang pro Variable), wobei

$$w_{ji} = \begin{cases} 2, & \text{falls } l_{ji} = x_i, \\ -2, & \text{falls } l_{ji} = \neg x_i, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \theta_j = n - 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_{ji}.$$

(iii) Lege ein Ausgabeneuron an (mit m Eingängen — ein Eingang für jedes Neuron, das in Schritt (ii) angelegt wurde), wobei

$$w_{(n+1)k} = 2, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{und} \qquad \theta_{n+1} = 1.$$

Trainieren von Schwellenwertelementen

Trainieren von Schwellenwertelementen

Die geometrische Interpretation bietet eine Möglichkeit, SWE mit 2 und 3 Eingängen zu konstruieren, aber:

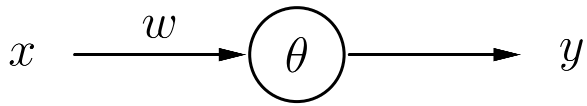
- Es ist keine automatische Methode.
  (Visualisierung und Begutachtung ist nötig).
- Nicht möglich für mehr als drei Eingabevariablen.

Grundlegende Idee des automatischen Trainings:

- Beginne mit zufälligen Werten für Gewichte und Schwellenwert.
- Bestimme den Ausgabefehler für eine Menge von Trainingsbeispielen.
- Der Fehler ist eine Funktion der Gewichte und des Schwellenwerts:
  $e = e(w_1, \ldots, w_n, \theta)$.
- Passe Gewichte und Schwellenwert so an, dass der Fehler kleiner wird.
- Wiederhole diese Anpassung, bis der Fehler verschwindet.

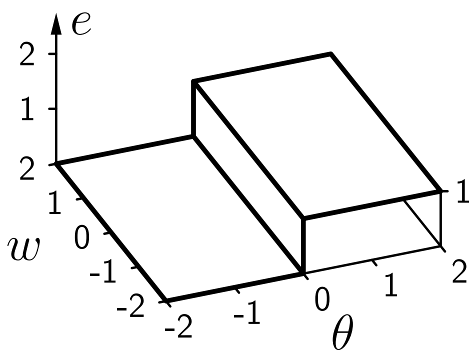
Trainieren von Schwellenwertelementen

Schwellenwertelement mit einer Eingabe für die Negation $\neg x$.

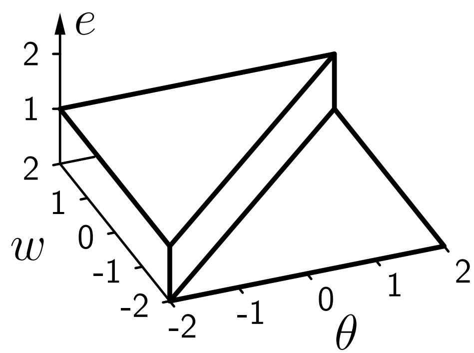


x	y
0	1
1	0

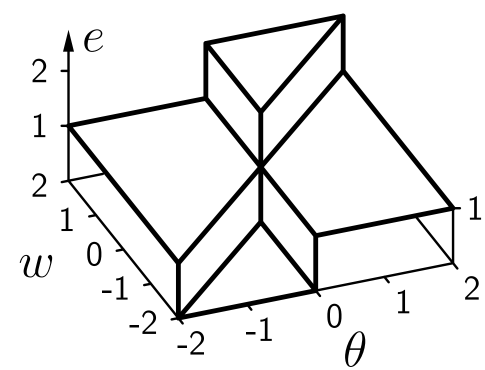
Ausgabefehler als eine Funktion von Gewicht und Schwellenwert.



Fehler für $x = 0$



Fehler für $x = 1$



Summe der Fehler

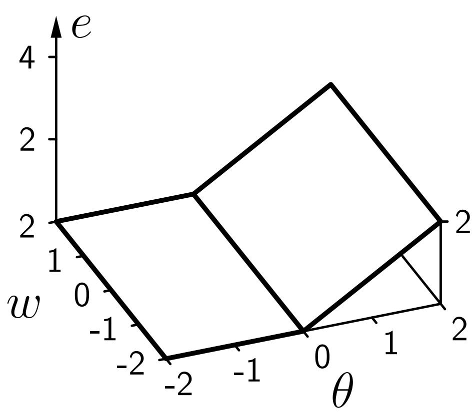
Trainieren von Schwellenwertelementen

Die Fehlerfunktion kann nicht direkt verwendet werden,
da sie aus Plateaus besteht.

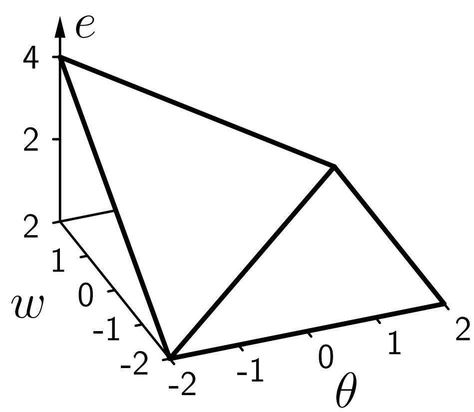
Lösung: Falls die berechnete Ausgabe falsch ist, dann berücksichtige,
wie weit θ überschritten (für $x = 0$) oder unterschritten ist (für $x = 1$).

anschaulich: Berechnung ist „umso falscher“,
je weiter θ überschritten (für $x = 0$) bzw. unterschritten ist (für $x = 1$).

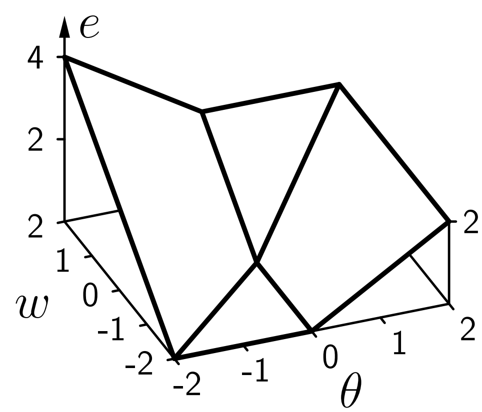
Modifizierter Ausgabefehler als Funktion von $\vec{w}$ und θ.



Fehler für $x = 0$



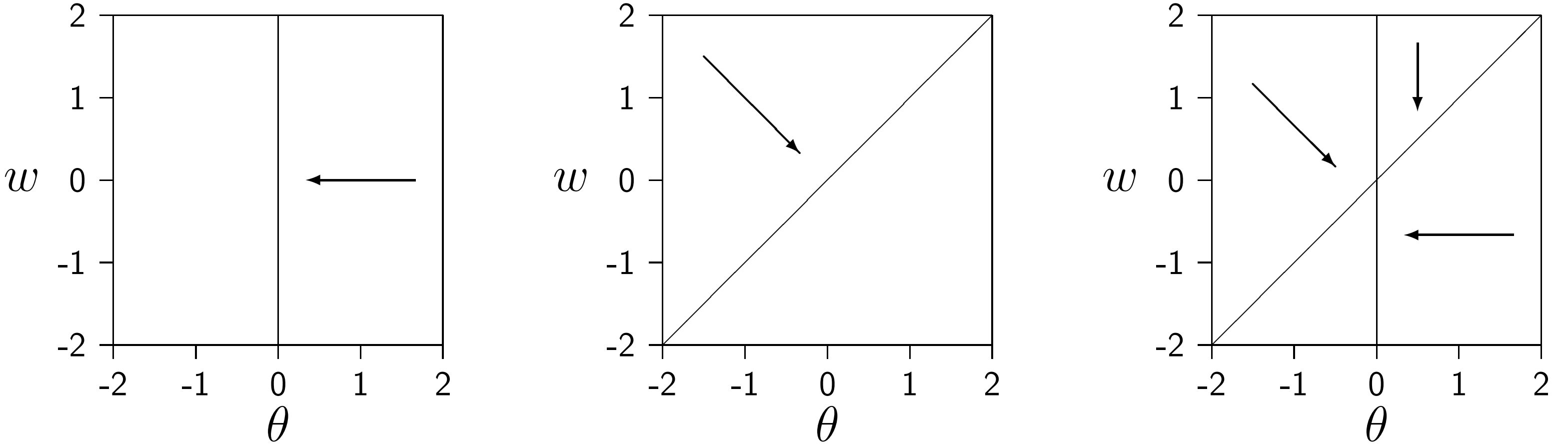
Fehler für $x = 1$



Summe der Fehler

Trainieren von Schwellenwertelementen

Schema der resultierenden Richtungen der Parameteränderungen.



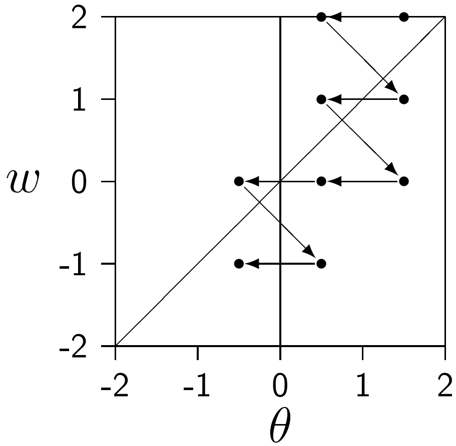
Änderungen für $x = 0$ Änderungen für $x = 1$ Summe der Änderungen

Beginne an zufälligem Punkt.

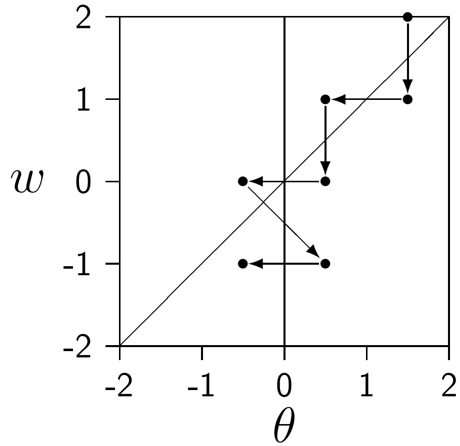
Passe Parameter iterativ an,
entsprechend der zugehörigen Richtung am aktuellen Punkt.

Trainieren von Schwellenwertelementen

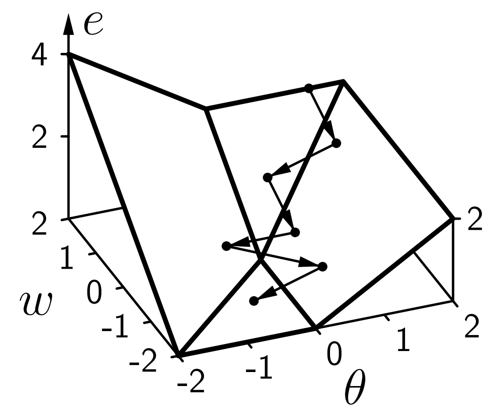
Beispieltrainingsprozedur: Online- und Batch-Training.



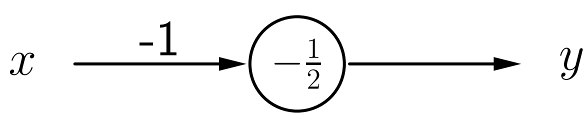
Online-Lernen

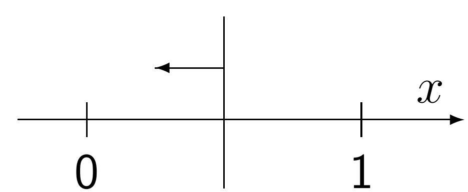


Batch-Lernen



Batch-Lernen





Delta-Regel

Formale Trainingsregel: Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Eingabevektor eines Schwellenwertelements, o die gewünschte Ausgabe für diesen Eingabevektor, und y die momentane Ausgabe des Schwellenwertelements. Wenn $y \neq o$, dann werden Schwellenwert θ und Gewichtsvektor $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ wie folgt angepasst, um den Fehler zu reduzieren:

$$\begin{aligned}
\theta^{(\text{neu})} &= \theta^{(\text{alt})} + \Delta\theta \quad \text{wobei} \quad \Delta\theta = -\eta(o - y),\\
\forall i \in \{1, \ldots, n\}: \quad w_i^{(\text{neu})} &= w_i^{(\text{alt})} + \Delta w_i \quad \text{wobei} \quad \Delta w_i = \eta(o - y)x_i,
\end{aligned}$$

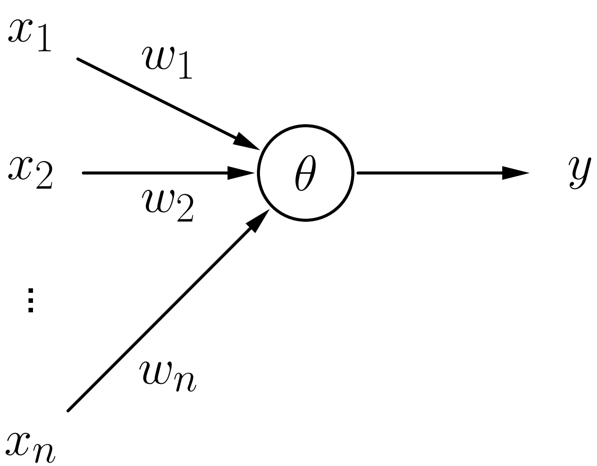
wobei η ein Parameter ist, der **Lernrate** genannt wird. Er bestimmt die Größenordnung der Gewichtsänderungen. Diese Vorgehensweise nennt sich **Delta-Regel** oder **Widrow–Hoff–Procedure** [Widrow and Hoff 1960].

Online-Training: Passe Parameter nach jedem Trainingsmuster an.

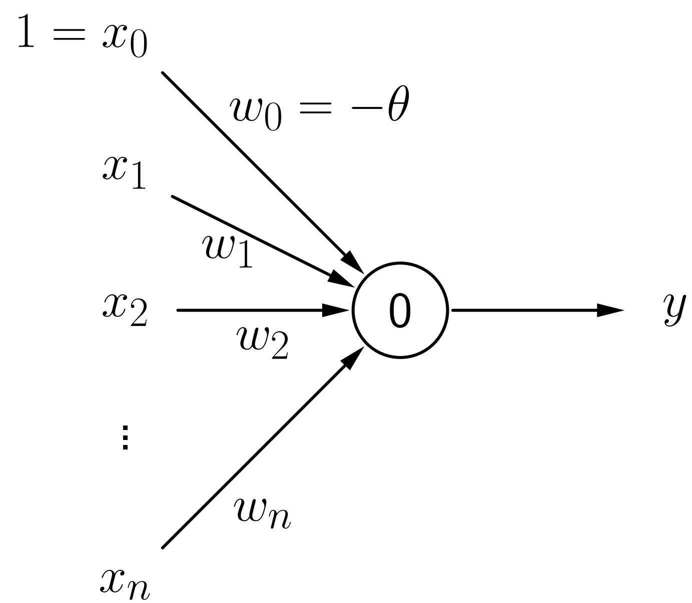
Batch-Training: Passe Parameter am Ende jeder **Epoche** an,
d.h. nach dem Durchlaufen aller Trainingsbeispiele.

Delta-Regel

Ändern des Schwellenwerts in ein Gewicht:



$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \theta$$



$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta \geq 0$$

Delta-Regel

```
procedure online_training (var w⃗, var θ, L, η);
var y, e;                                   (* Ausgabe, Fehlersumme *)
begin
  repeat
    e := 0;                                 (* initialisiere Fehlersumme *)
    for all (x⃗, o) ∈ L do begin             (* durchlaufe Trainingsmuster*)
      if (w⃗x⃗ ≥ θ) then   y := 1;           (* berechne Ausgabe*)
                  else   y := 0;           (* des Schwellenwertelements *)
      if (y ≠ o) then begin                 (* Falls Ausgabe falsch *)
        θ  := θ  − η(o − y);                (* passe Schwellenwert *)
        w⃗ := w⃗ + η(o − y)x⃗;                (* und Gewichte an *)
        e  := e  +  |o − y|;                (* summiere die Fehler*)
      end;
    end;
  until (e ≤ 0);                            (* wiederhole die Berechnungen*)
end;                                        (* bis der Fehler verschwindet*)
```

Delta-Regel

```
procedure batch_training (var w⃗, var θ, L, η);
var y, e,                                      (* Ausgabe, Fehlersumme *)
    θ_c, w⃗_c;                                  (* summierte Änderungen *)
begin
  repeat
    e := 0; θ_c := 0; w⃗_c := 0⃗;                (* Initialisierungen *)
    for all (x⃗, o) ∈ L do begin                (* durchlaufe Trainingsbeispiele*)
      if (w⃗x⃗ ≥ θ) then  y := 1;                (* berechne Ausgabe *)
                  else  y := 0;                (* des Schwellenwertelements *)
      if (y ≠ o) then begin                    (* Falls Ausgabe falsch*)
        θ_c := θ_c − η(o − y);                 (* summiere die Änderungen von*)
        w⃗_c := w⃗_c + η(o − y)x⃗;                (* Schwellenwert und Gewichten *)
        e   := e + |o − y|;                    (* summiere Fehler*)
      end;
    end;
    θ  := θ + θ_c;                             (* passe Schwellenwert*)
    w⃗  := w⃗ + w⃗_c;                             (* und Gewichte an *)
  until (e ≤ 0);                               (* wiederhole Berechnungen *)
end;                                           (* bis der Fehler verschwindet*)
```

Online

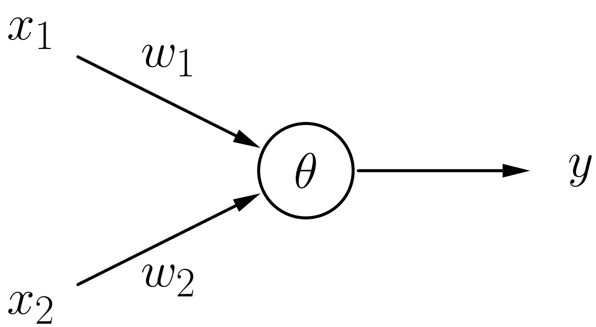
Epoche	x	o	$\vec{x}\vec{w}$	y	e	$\Delta\theta$	Δw	θ	w
								1.5	2
1	0 1	1 0	-1.5 1.5	0 1	1 -1	-1 1	0 -1	0.5 1.5	2 1
2	0 1	1 0	-1.5 0.5	0 1	1 -1	-1 1	0 -1	0.5 1.5	1 0
3	0 1	1 0	-1.5 0.5	0 0	1 0	-1 0	0 0	0.5 0.5	0 0
4	0 1	1 0	-0.5 0.5	0 1	1 -1	-1 1	0 -1	-0.5 0.5	0 -1
5	0 1	1 0	-0.5 -0.5	0 0	1 0	-1 0	0 0	-0.5 -0.5	-1 -1
6	0 1	1 0	0.5 -0.5	1 0	0 0	0 0	0 0	-0.5 -0.5	-1 -1

Batch

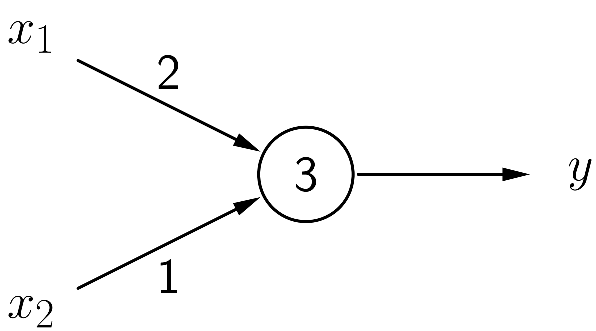
Epoche	x	o	$\vec{x}\vec{w}$	y	e	$\Delta\theta$	Δw	θ	w
								1.5	2
1	0	1	-1.5	0	1	-1	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	1.5	1
2	0	1	-1.5	0	1	-1	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	0.5	1
3	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	0.5	0
4	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	0
5	0	1	0.5	1	0	0	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	0.5	-1
6	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	-1.5	0	0	0	0	-0.5	-1
7	0	1	0.5	1	0	0	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	-1

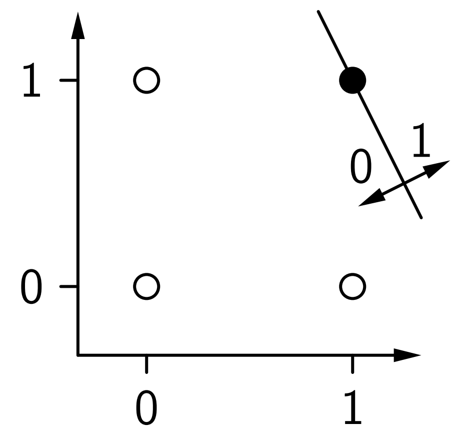
Konjunktion

Schwellenwertelement mit zwei Eingängen für die Konjunktion.



x_1	x_2	y
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1





Konjunktion

Epoche	x_1	x_2	o	$\vec{x}\vec{w}$	y	e	$\Delta\theta$	Δw_1	Δw_2	θ	w_1	w_2
										0	0	0
1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	1	0	0
	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	0	1	1
2	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	2	1	0
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	2	1	0
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	1	2	1
3	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	1
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	2	2	0
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	3	1	0
	1	1	1	-2	0	1	-1	1	1	2	2	1
4	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	2	1
	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	2	1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	3	1	1
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	2	2	2
5	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	2	2
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	3	2	1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	1	1	0	1	0	0	0	0	3	2	1
6	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	3	2	1
	0	1	0	-2	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	1	1	0	1	0	0	0	0	3	2	1

Biimplikation

Epoch	x_1	x_2	o	$\vec{x}\vec{w}$	y	e	$\Delta\theta$	Δw_1	Δw_2	θ	w_1	w_2
										0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	0	-1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	-1
	1	1	1	-2	0	1	-1	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	1	-1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	2	0	-1
	1	1	1	-3	0	1	-1	1	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	1	-1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	2	0	-1
	1	1	1	-3	0	1	-1	1	1	1	1	0

Konvergenz

Konvergenztheorem: Sei $L = \{(\vec{x}_1, o_1), \ldots (\vec{x}_m, o_m)\}$ eine Menge von Trainingsmustern, jedes bestehend aus einem Eingabevektor $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ und einer gewünschten Ausgabe $o_i \in \{0, 1\}$. Sei weiterhin $L_0 = \{(\vec{x}, o) \in L \mid o = 0\}$ und $L_1 = \{(\vec{x}, o) \in L \mid o = 1\}$. Falls L_0 und L_1 linear separabel sind, d.h., falls $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} &\forall (\vec{x}, 0) \in L_0 : \quad && \vec{w}\vec{x} < \theta \qquad \text{und} \\ &\forall (\vec{x}, 1) \in L_1 : \quad && \vec{w}\vec{x} \geq \theta, \end{aligned}$$

dann terminieren sowohl Online- als auch Batch-Training.

Für nicht linear separable Probleme terminiert der Algorithmus nicht.

Zusammenfassung

Einzelne Schwellenwertelemente haben starke Einschränkungen:
Sie können nur linear separable Funktionen berechnen.

Netzwerke aus Schwellenwertelementen können beliebige Boolesche Funktionen berechnen.

Das Trainieren einzelner Schwellenwertelemente mit der Delta-Regel ist schnell und findet garantiert eine Lösung, falls eine existiert.

Netzwerke aus Schwellenwertelementen können nicht mit der Delta-Regel trainiert werden.